STUDIE ÜBER DIE VARIANTEN DES ROULLETTESPIELS MIT EINFACHEN CHANEN

Dr. Helmut Brunner

Da beim Roulette die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel auf Null fällt gleich 1/37 ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit für die einfachen Chancen (1 - 1/37)/2 = 0.49

Alle Spielvarianten mit einfachen Chancen lassen sich repräsentieren durch eine Zufallsauswahl aus der Menge $\{0,1,z\}$ (z für zero) mit den Wahrscheinlichkeiten $\{0.49,\ 0.49,\ 0.02\}$

Für einen Spieler, der Einsätze z.B. auf "rot" tätigt, ist eine Information wichtig, mit welcher Wahrscheinlichkeit er damit rechnen darf, daß eine Verlustserie eine gewisse Länge l nicht überschreitet. In Verbindung mit dem Tischlimit kann er dann berechnen, wie oft er durch Verdoppeln seiner vorangehenden Einsätze doch noch den Ersteinsatz A gewinnen kann.

Angenommen, ein Spieler setzt auf die durch "1" repräsentierte einfache Chance, dann gibt es Verlustserien der Länge 0 (sofortiger Gewinn), 1,2,.....usw.

Die Länge der Verlustserie stellt somit eine diskrete Verteilung dar, die durch

$$X = \{0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

mit der dazugehörigen Menge der Wahrscheinlichkeiten

$$P = \{0.49,\ 0.49\times0.51,\ 0.49\times0.51^2,\ 0.49\times0.51^3,\ldots\ldots\ldots\}$$

dargestellt wird.

Betrachten wir etwa eine Verlustserie der Länge 3, dann kann diese durch folgende Fälle realisiert werden:

0,0,0,1	oder	0,0,z,1	oder	0,z,z,1	oder	z,z,z,1
		0,z,0,1		z,0,z,1		
		z,0,0,1		z,z,0,1		

die zugehörige Wahrscheinlichkeit lautet:

$$0.49 \times 0.49^3 + 3 \times 0.49^2 \times 0.02 \times 0.49 + 3 \times 0.49 \times 0.02^2 \times 0.49 + 0.02^3 \times 0.49 =$$
$$= 0.49 \times (0.49 + 0.02)^3 = 0.49 \times 0.51^3$$

Für den Mittelwert dieser Verteilung erhält man:

$$E(X) = \sum_{k=c}^{\infty} x_k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51^k = 0{,}49 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}51^k$$

Die Varianz V(X) berechnet man mit Hilfe des sogenannten Verschiebungssatzes:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

wobei $E(X^2) = \sum_{k=c}^{\infty} x_k^2 \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51^k = 0{,}49 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot 0{,}51^k$

Um die unendlichen Reihen für $E(X)$ und $E(X^2)$ berechnen zu können, betrachten wir allgemein Potenzreihen der Form:

$$fn(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n \cdot x^k$$

Wendet man darauf das Cauchy'sche Konvergenzkriterium an, so folgt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^n \cdot x^{k+1}}{k^n \cdot x^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \cdot x$$

$$\lim_{k \to \infty} \left\langle \frac{a_{k+1}}{a_k} \right\rangle = x$$

Für das Intervall $|x|<1$ sind daher alle fn(x) gleichmäßig konvergent und man kann die unendlichen Reihen gliedweise differenzieren.

Gehen wir von $f_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} . x^k$ aus

und berechnen $f'_{n-1}(x)$ so finden wir:

$$f'_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n . x^{k-1}$$

Wegen $fn(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n . x^k = x . \sum_{k=1}^{\infty} k^n . x^{k-1}$ folgt daraus

die Rekursionsformel $fn(x) = x . f'_{n-1}(x)$

mit $f_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x)$

Daher wird $E(X) = 0{,}49 \ . \ f_1(0{,}51)$

$$f_1(x) = x . f'_0(x) = x/(1-x)^2$$

$$\underline{E(X)} = 0{,}49 . 0{,}51 \ / \ 0{,}49^2 = \underline{1{,}04}$$

Für $E(X^2)$ erhält man: $E(X^2) = 0{,}49 \ . \ f_2(0{,}51)$

$$f_2(x) = x . f'_1(x) = x . (1 + x) \ / \ (1-x)^3$$

$$\underline{E(X^2)} = 0{,}49 . 0{,}51 . 1{,}51 \ / \ 0{,}49^3 = \underline{3{,}21}$$

Für die Varianz ergibt sich daraus:

$$\underline{V(X)} = E(X^2) - E^2(X) = 3{,}21 - 1{,}08 = \underline{2{,}13}$$

Da diese theoretischen Werte unter der Voraussetzung einer unendlichen Anzahl von Spielen berechnet wurden, ist es zweckmäßig, die tatsächliche Spielsituation an einem Roulette-Tisch mittels Computersimulation nachzuahmen.

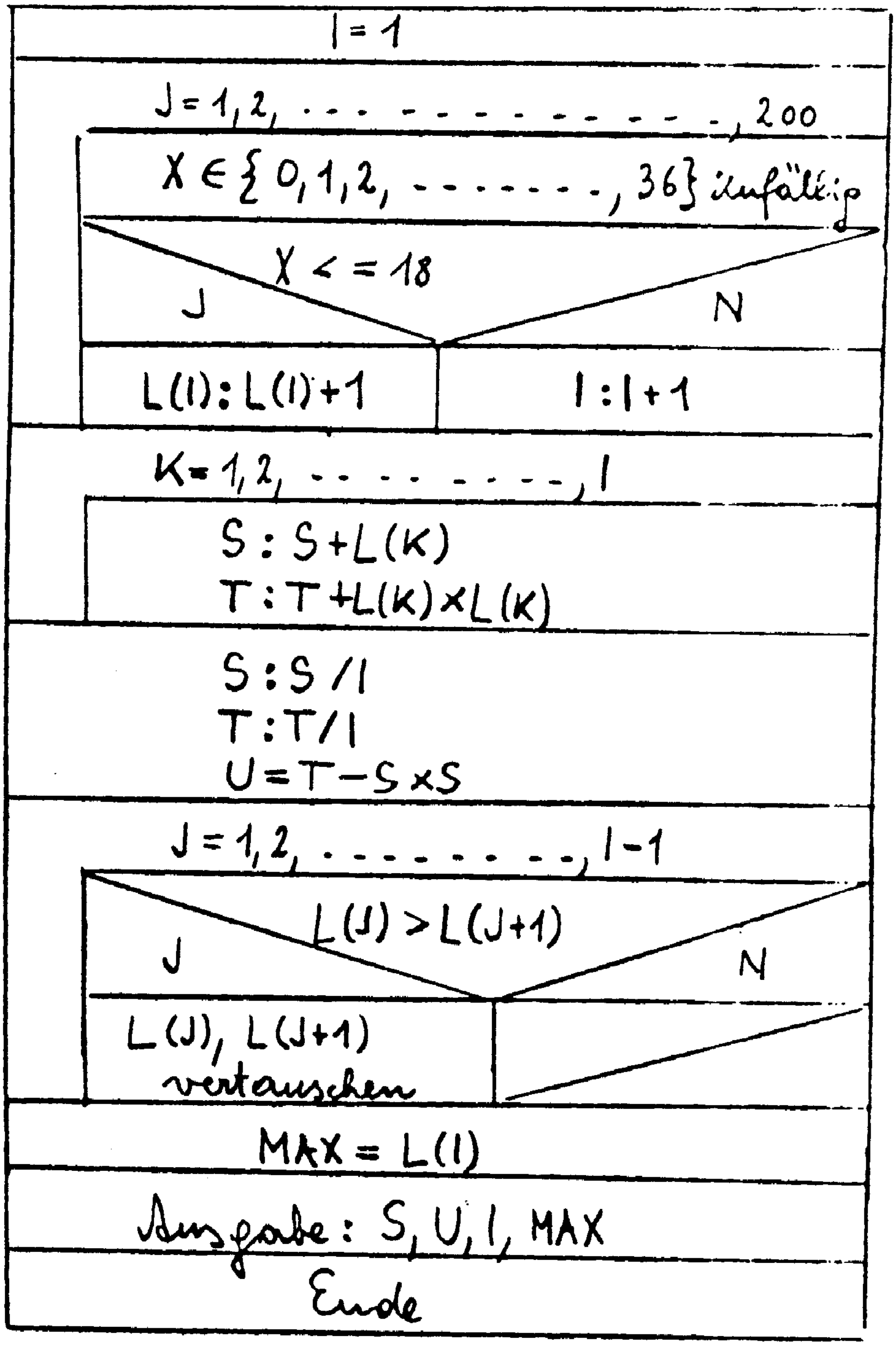
Das folgende Programm berechnet für jeweils 200 Spiele die mittlere Serienlänge, die Streuung, die Anzahl der Verlustserien und deren maximale Länge:

Simulation von 200 Spielen

Mittlere Länge $S = \sum_{K=1}^{I} L(K)/I$

$T = \sum_{K=1}^{I} L(K)^2/I$, Varianz $U = T - S^2$

$L(I)$ = Länge der Verlustserie I



Da die Simulationen auch die theoretischen Werte sehr gut bestätigen, kann man aus der Verteilung X,P nun berechnen, welche maximale Serienlänge (Verlustserie) noch mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit vorkommen wird. Wir führen dies für eine Wahrscheinlichkeit von 99 % aus:

$$P(X \leq L) = \sum_{k=0}^{k=L} 0{,}49 . 0{,}51^k = 0{,}99$$

$$0{,}49 \ .(1-0{,}51^{L+1}) \ / \ 0{,}49 = 0{,}99$$

bzw. $L+1 = \ln 0{,}01 \ / \ \ln 0{,}51$

und $\underline{L} = 5{,}8 \approx \underline{6}$

Für einen Spieler, der auf einfache Chancen setzt, bedeutet das, daß er mit 99 %-iger Wahrscheinlichkeit damit rechnen kann, daß eine Verlustserie nach höchstens 6 Coups zu Ende geht und er beim 7. Spiel gewinnen wird. Um seine vorhergehenden Verluste auszugleichen, müßte er jedesmal seinen Einsatz verdoppeln:

Einsätze	A	2 A	4 A	8 A	16 A	32 A	64 A
Gesamtaufwand	A	3 A	7 A	15 A	31 A	63 A	127 A
Erlös bei Gewinn	2 A	4 A	8 A	16 A	32 A	64 A	128 A
Tatsächl. Gewinn	A	A	A	A	A	A	A

Für diese 7 Spiele benötigt er ein Kapital von 127 A. Den Gewinn A beim 7. Coup kann er nur realisieren, wenn das Tischlimit L nicht überschritten wird, d.h. wenn $64 \ A \leq L$.

Für L = 24.ooo erhält man als höchstmöglichen Ersteinsatz einen Betrag von 375. Das dazu benötigte Spielkapital beträgt 127 A = 47.625. Für ein Tischlimit von 60.000 wird A = 900 bei einem Spielkapital von 114.300 und bei L = 120.000 wird A = 1875 mit einem Kapital von 238.125.

Noch günstiger ist es, an einem Tisch mit dem Limit 60.000 mit einem Ersteinsatz von 100 zu spielen, da man dadurch 10 mal den Einsatz verdoppeln kann und den Einsatz mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9 % gewinnt. Dazu ist allerdings ein Kapitaleinsatz von 102.300,- erforderlich.

Es folgen nun Computersimulationen für verschiedene Strategien, bei denen auch noch untersucht wird, wie sich verschiedene Ersteinsätze auf die Gewinnsituation auswirken.

Strategie 1

Es wird auf eine einfache Chance gesetzt. Bei Verlust verdoppelt man den Einsatz. Dabei setzt man sich ein Verlustlimit L, welches nicht höher sein darf als das Tischlimit. Würde beim Verdoppeln der Einsätze dieses Limit überschritten, so beginnt man wieder mit dem Ersteinsatz A. Im Gewinnfall beginnt man ebenfalls wieder mit dem Ersteinsatz.

Strategie 2

Wie Strategie 1, jedoch setzt man bei einer Verlustserie, bei der durch Verdoppeln der Einsätze das Limit L überschritten würde nicht den Ersteinsatz A sondern dieses Limit L.

Strategie 3

Diese entspricht der Strategie 1, jedoch mit dem Unterschied, daß man abwechselnd auf die einfachen Chancen setzt.

Strategie 4

Sie entspricht der Strategie 2, jedoch mit dem Unterschied, daß man wieder abwechselnd auf die einfachen Chancen setzt.

Roulett:

Programm für Computersimulation

```
LLIST
10 RANDOMIZE
20 INPUT"STRATEGIE 1,2 3 ODER 4 WAHLEN ";KZ
30 INPUT"ERSTEINSATZ ";A
35 E=A:Y=1
40 INPUT"VERLUSTLIMIT ";L
50 INPUT"ANZAHL DER SPIELE ";N
60 FOR J= 1 TO N
70 X=INT(37*RND):PRINT X;
80 Z=X/2-INT(X/2)
90 ON KZ GOSUB 500,600,700,800
100 NEXT J
110 PRINT
120 PRINT"GESAMTGEWINN=";S
130 END
500 IF X=0 THEN G=-E:PRINT G;:E=2*E:GOTO 525
510 IF X>0 AND Z=0 THEN G=E:PRINT G;:E=A:GOTO 530
520 G=-E:PRINT G;:E=2*E
525 IF E>L THEN E=A
530 S=S+G
540 RETURN
600 IF X=0 THEN G=-E:PRINT G;:E=2*E:GOTO 625
610 IF X>0 AND Z=0 THEN G=E:PRINT G;:E=A:GOTO 630
620 G=-E:PRINT G;:E=2*E
625 IF E>L THEN E=L
630 S=S+G
640 RETURN
700 Y=-Y:V=(Y+1)/2
710 IF X=0 THEN G=-E:PRINT G;:E=2*E:GOTO 745
720 IF Z>0 THEN U=1 ELSE U=0
730 IF X>0 AND V=U THEN G=E:PRINT G;:E=A:GOTO 750
740 G=-E:PRINT G;:E=2*E
745 IF E>L THEN E=A
750 S=S+G
760 RETURN
800 Y=-Y:V=(Y+1)/2
810 IF X=0 THEN G=-E:PRINT G;:E=2*E:GOTO 845
820 IF Z>0 THEN U=1 ELSE U=0
830 IF X>0 AND V=U THEN G=E:PRINT G;:E=A:GOTO 850
840 G=-E:PRINT G;:E=2*E
845 IF E>L THEN E=L
850 S=S+G
860 RETURN
OK
```

STRATEGIE 5

Das folgende Computerprogramm simuliert 100 Spieltage zu je 100 Spielen mit folgender Strategie:

Es wird für jeden Spieltag ein Kapital von S 64.000,- und ein Ersteinsatz von A = 250 angenommen. Bei Gewinn wird wieder A gesetzt, bei Verlust wird der Einsatz verdoppelt, sofern dazu noch genügend Kapital vorhanden ist. Würde der Einsatz größer als das noch vorhandene Kapital, dann setzt man dieses Kapital vermindert um 250.

Man hört vorzeitig auf, wenn das Risiko bestünde, daß durch den nächsten Einsatz, der entsprechend der dargestellten Strategie getätigt würde, das Kapital unter den Betrag von 250 sinken würde.

Für jeden Tag sind die Nummer des Tages, das verbliebene Endkapital und der Gewinn ausgedruckt.

In der letzten Zeile wird der Durchschnittsgewinn dieser 100 Tage ausgedruckt.

STRATEGIE 5

```
10 LPRINT"SPIELTAG       KAPITAL                    GEWINN"
20 FOR I=1 TO 100
30 A=250:K=64000!
40 E=A:S=0
45 RANDOMIZE
50 FOR J=1 TO 100
60 X=INT(37*RND)
70 IF X>18 THEN G=E:E=A:GOTO 90
80 G=-E:E=2*E
90 S=S+G:K=K+G
100 IF K<250 THEN K=K+E/2:S=S+E/2:GOTO 130
110 IF E>K AND K>250 THEN E=K-250
120 NEXT J
130 LPRINT USING"####       ########                 ########";I,K,S
140 T=T+S
150 NEXT I
160 T=T/100
170 LPRINT USING"DURCHSCHNITTSGEWINN= ########";T
180 END
```

AUSDRUCK VON 10 SPIELTAGEN ZU JE 100 SPIELEN

SPIELTAG	KAPITAL	GEWINN
1	75750	11750
2	75500	11500
3	74750	10750
4	77750	13750
5	13000	-51000
6	67250	3250
7	78250	14250
8	1000	-63000
9	75000	11000
10	77250	13250

GEWINNERWARTUNGEN

Wie auf Seite 6 gezeigt wurde, besteht eine Wahrscheinlichkeit von 99 % dafür, daß eine Verlustserie nach 6 Spielen beendet ist und man beim 7. Spiel den Ersteinsatz A zurückgewinnt. Andererseits besteht aber eine Wahrscheinlichkeit von 1 % dafür, daß auch das 7. Spiel verloren wird, wodurch man wegen des vorangehenden Verdoppelns einen Verlust von 127 A erzielt.

Somit beträgt der Erwartungswert für den Gewinn:

$$E(G) = 0{,}99A - 0{,}01 \times 127\ A = \underline{-0{,}28\ A}$$

Darüber hinaus kann man für die einfachen Chancen folgenden Satz beweisen:

Wenn ein Spieler über lange Zeit auf einfache Chancen setzt und dabei irgendeine Strategie anwendet, bei der die Einsätze von den vorangegangenen Ergebnissen abhängen, so beträgt sein durchschnittlicher Verlust 1/37 des eingesetzten Kapitals.

Beweis: Im Spiel mit der Nummer i setzt der Spieler einen Betrag e_i auf eine einfache Chance. Der erwartete Gewinn ist die Differenz aus den erwarteten Einnahmen und den erwarteten Ausgaben:

$$E(G_i) = \frac{18}{37} e_i - \frac{19}{37} e_i = - \frac{1}{37} e_i$$

Wenn der Spieler n-mal spielt, so ist sein Gesamteinsatz
$K = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots\ldots. + e_n$.
Der erwartete Gewinn wird:

$$E(G) = \sum E(G_i) = - \frac{1}{37} (e_1 + e_2 + \ldots\ldots. + e_n) = \underline{- \frac{1}{37} K}$$